

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = -\frac{2}{3}x^3 + mx^2 + (m-2)x - 2$ (1)

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 2$.
- Xác định các giá trị m để hàm số (1) nghịch biến trên nửa khoảng $[0; +\infty)$

Câu II (2 điểm)

1) Giải phương trình: $\frac{\sqrt{3} - \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos x} = 2\sqrt{3} + \tan x - \cot x$

2) Giải bất phương trình: $\frac{3}{2} \log_2(x+3)^2 - 3 \leq \log_2(x+7)^3 - \log_2(5-x)^3$

Câu III (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\log_2(3 \sin x + \cos x)}{\sin^2 x} dx$

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$;

$SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$. Mặt phẳng (P) qua BC hợp với BD một góc 30° và cắt SA, SD lần lượt tại M, N. Tính thể tích khối chóp A.BCNM và khoảng cách giữa BD và SC.

Câu V (1 điểm) Xác định các giá trị m để hệ phương trình sau có nghiệm thực:

$$\begin{cases} x + y + 2xy - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy(1+m) + 3(1-m) = 0 \end{cases}$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) (Thí sinh chọn một trong hai phần sau)

1. Theo chương trình Chuẩn:

Câu VIa (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với $A(2; 4)$, phân giác góc \widehat{ABC} nằm trên đường thẳng $d: x - 3y + 5 = 0$, trung tuyến từ C có phương trình: $3x - 2y + 5 = 0$. Tính diện tích tam giác ABC.

2) Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{2}$, $d_2: \frac{x+4}{-1} = \frac{z-2}{-3} = \frac{z+3}{1}$ và điểm $C(1; 1; 2)$. Gọi A, B là hai điểm lần lượt nằm trên d_1 và d_2 đồng thời AB vuông góc với mặt phẳng (P): $5x + 4y + z + 2 = 0$. Viết phương trình đường phân giác góc \widehat{ACB} của tam giác ABC.

Câu VIIa (1 điểm) Tìm số phức z thỏa mãn các điều kiện $|z+5i| = |-3+i\bar{z}|$ và $i\bar{z} - \frac{2}{z}$ là số ảo

2. Theo chương trình Nâng cao:

Câu VIb (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ và điểm $C(5; 0)$. Tìm tọa độ điểm A và B trên (E) sao cho $CA = CB$ và diện tích tam giác ABC lớn nhất .

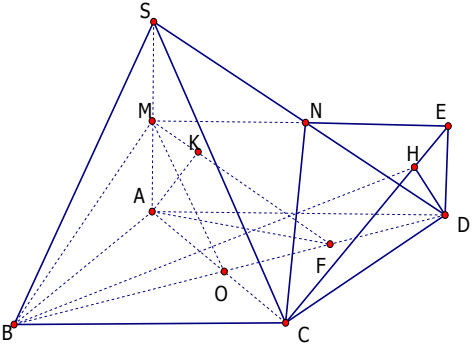
2) Trong không gian tọa độ Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x+3}{4} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{-2}$ và mặt phẳng (P) :

$2x + 3y - z + 4 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua điểm $A(2; 2; 1)$ song song với đường thẳng d đồng thời hợp với mặt phẳng (P) một góc 60° .

Câu VIIb (1 điểm) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \ln(1+2x) - \ln(1+2y) = 2x - 2y \\ x^2 - 6xy + 3y^2 = -8 \end{cases}$$

Câu	Đáp án	Điểm
II	<p>Câu II (2 điểm)</p> <p>1) (1 điểm) ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$</p> <p>Pt tương đương: $(\sqrt{3} - \cos x) \cos x + \sin^2 x = 2\sqrt{3} \sin^2 x \cos x + \sin x(\sin^2 x - \cos^2 x)$</p> <p>$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x(1 - 2 \sin^2 x) = \sin x(\sin^2 x - \cos^2 x) + \cos^2 x - \sin^2 x$</p> <p>$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos x \cdot \cos 2x = -\sin x \cdot \cos 2x + \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x(\sqrt{3} \cos x + \sin x - 1) = 0$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0 (a) \\ \sqrt{3} \cos x + \sin x = 1 (b) \end{cases}$</p> <p>(a) $\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$</p> <p>(b) $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (loai) \\ x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$</p> <p>2) (1 điểm) ĐK $\begin{cases} -7 < x < 5 \\ x \neq -3 \end{cases}$. Với điều kiện trên BPT tương đương</p> <p>$\log_2 x+3 - 1 \leq \log_2(x+7) - \log_2(5-x)$</p> <p>$\Leftrightarrow \log_2 x+3 (5-x) \leq \log_2 2(x+7) \Leftrightarrow x+3 (5-x) \leq 2(x+7) \quad (1)$</p> <p>+ Nếu $-7 < x < -3$ thì (1) $\Leftrightarrow -(x+3)(5-x) \leq 2(x+7) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 29 \leq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow 2 - \sqrt{33} \leq x \leq 2 + \sqrt{33}$</p> <p>So điều kiện chọn $2 - \sqrt{33} \leq x < -3$</p> <p>+ Nếu $-3 < x < 5$ thì (1) $\Leftrightarrow (x+3)(5-x) \leq 2(x+7) \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$</p> <p>So điều kiện chọn $\begin{cases} -3 < x \leq -1 \\ 1 \leq x < 5 \end{cases}$</p> <p>+ Kết luận : Tập nghiệm BPT là $S = (2 - \sqrt{33}; -3) \cup (-3; -1] \cup [1; 5)$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>-----</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>-----</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>-----</p>
III	<p>Câu III (1 điểm) $I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\log_2(3 \sin x + \cos x)}{\sin^2 x} dx = \frac{1}{\ln 2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\ln(3 \sin x + \cos x)}{\sin^2 x} dx$</p> <p>+ Đặt $\begin{cases} u = \ln(3 \sin x + \cos x) \\ dv = \frac{1}{\sin^2 x} dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{3 \cos x - \sin x}{3 \sin x + \cos x} dx \\ v = -\cot x - 3 = \frac{-\cos x - 3 \sin x}{\sin x} \end{cases}$</p> <p>+ $I = \frac{1}{\ln 2} [(-\cot x - 3) \ln(3 \sin x + \cos x)]_{\pi/4}^{\pi/2} + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{3 \cos x - \sin x}{\sin x} dx$</p> <p>$= \frac{1}{\ln 2} [-3 \ln 3 + 4 \ln 2\sqrt{2} + (3 \ln \sin x - x)]_{\pi/4}^{\pi/2}$</p> <p>$= \frac{1}{\ln 2} [15 \ln \sqrt{2} - 3 \ln 3 - \frac{\pi}{4}]$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
IV	<p>Câu IV (1 điểm)</p> <p>+ $BC // AD \Rightarrow (P) \cap (SAD) = MN // AD // BC$. Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp BM$</p>	<p>-----</p>

Câu	Đáp án	Điểm																						
	 <p> \Rightarrow BCNM là hình thang vuông. Kẻ $DE \parallel SA$, với $E \in MN$ thì $DE \perp (ABCD)$. Hạ $DH \perp CE$, $H \in CE$ thì $DH \perp (BCNM) \Rightarrow \angle DBH = 30^\circ$ $BD = 2a$; $HD = BD \cdot \sin 30^\circ = a$ $\frac{1}{DH^2} = \frac{1}{DC^2} + \frac{1}{DE^2} \Rightarrow DE = \frac{a\sqrt{6}}{2} = AM$ $\Rightarrow M$ trung điểm $SA \Rightarrow MN = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a$ </p> <p> $+ BM = \sqrt{AB^2 + AM^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow S_{BCNM} = \frac{1}{2}(MN + BC)BM = \frac{9a^2\sqrt{2}}{8}$ </p> <p> $+ AD \parallel (P) \Rightarrow d(A; (P)) = d(D; (P)) = DH = a$. $\Rightarrow V_{A.BCNM} = \frac{1}{3}S_{BCNM} \cdot d(A; (BCNM)) = \frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$ </p> <p> $+ O = AC \cap BD$, $OM \parallel SC \Rightarrow SC \parallel (MBD) \Rightarrow d(SC; BD) = d(C; (MBD))$ Kẻ $AF \perp BD$, $F \in BD$ và $AK \perp MF$, $K \in MF$ thì $AK \perp (MBD)$ $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AF^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{2}{a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ </p> <p> $+ Do O$ trung điểm $AC \Rightarrow d(SC; BD) = d(C; (MBD)) = d(A; (MBD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ </p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>----</p>																						
<p>V</p>	<p>Câu V (1 điểm) $\begin{cases} x + y + 2xy - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2xy(1+m) + 3(1-m) = 0 \end{cases}$</p> <p>Đặt $S = x + y$, $P = xy$, $S^2 \geq 4P$ thì hệ trở thành $\begin{cases} S + 2P - 4 = 0 \\ S^2 + 2mP + 3(1-m) = 0 \end{cases}$</p> <p> $\Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{4-S}{2} \\ S^2 + m(4-S) + 3(1-m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{4-S}{2} \\ m = \frac{S^2+3}{S-1} (*) \end{cases}$ </p> <p> $+ S^2 \geq 4P \Leftrightarrow S^2 \geq 2(4-S) \Leftrightarrow S^2 + 2S - 8 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S \leq -4 \\ S \geq 2 \end{cases}$ </p> <p> $+ Hệ$ có nghiệm khi và chỉ khi (*) có nghiệm $S \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$ </p> <p>Đặt $f(S) = \frac{S^2+3}{S-1} \Rightarrow f'(S) = \frac{S^2-2S-3}{(S-1)^2}$, $f'(S) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = -1 \\ S = 3 \end{cases}$</p> <p>BBT</p> <table border="1" data-bbox="256 1648 1377 1837"> <tr> <td>S</td> <td>$-\infty$</td> <td>-4</td> <td>-1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>$+\infty$</td> </tr> <tr> <td>$f'(S)$</td> <td colspan="2">+</td> <td colspan="3">-</td> <td>+</td> </tr> <tr> <td>$f(S)$</td> <td>$-\infty$</td> <td>$\nearrow -19/5$</td> <td colspan="3">//</td> <td>$\searrow 6$</td> <td>$\nearrow +\infty$</td> </tr> </table> <p>Phương trình $m = f(S)$ có nghiệm $S \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty) \Leftrightarrow m \in (-\infty; -\frac{19}{5}] \cup [6; +\infty)$</p>	S	$-\infty$	-4	-1	2	3	$+\infty$	$f'(S)$	+		-			+	$f(S)$	$-\infty$	$\nearrow -19/5$	//			$\searrow 6$	$\nearrow +\infty$	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
S	$-\infty$	-4	-1	2	3	$+\infty$																		
$f'(S)$	+		-			+																		
$f(S)$	$-\infty$	$\nearrow -19/5$	//			$\searrow 6$	$\nearrow +\infty$																	

Câu	Đáp án	Điểm	
<p>VIa</p>	<p>II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) (Thí sinh chọn một trong hai phần sau)</p> <p>1. Theo chương trình Chuẩn:</p> <p>Câu VIa (2 điểm)</p> <p>1) (1 điểm) Gọi D đối xứng của A qua đường thẳng d thì D thuộc đường thẳng BC $AD \perp d \Rightarrow$ phương trình đường thẳng AD: $3x + y - 10 = 0$. Tọa độ $K = AD \cap d$ là nghiệm hệ $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0 \\ 3x + y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5/2 \\ y = 5/2 \end{cases} \Rightarrow K(5/2; 5/2) \Rightarrow D(3; 1)$</p> <p>$B(3b - 5; b) \in d; M(m; \frac{3m+5}{2})$ là trung điểm của AB $\Rightarrow \begin{cases} 2x_M = x_A + x_B \\ 2y_M = y_A + y_B \end{cases}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 2 + 3b - 5 \\ 3m + 5 = 4 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ m = 0 \end{cases}$. Suy ra B(-2; 1)</p> <p>+ Phương trình đường thẳng BD: $y = 1 \Rightarrow C(-1; 1)$,</p> <p>$BC = 1, d(A; BC) = 3$. Suy ra $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot d(A; BC) = \frac{3}{2}$</p> <p>2) $A(-2 + 2a; 2 + a; -3 + 2a) \in d_1, B(-4 - b; 2 - 3b; -3 + b) \in d_2$ $\vec{AB} = (-2 - b - 2a; -3b - a; b - 2a)$; (P) có VTPT $\vec{n} = (5; 4; 1)$</p> <p>+ $AB \perp (P) \Leftrightarrow \vec{AB}$ cùng phương với $\vec{n} = (5; 4; 1) \Leftrightarrow \frac{-2-b-2a}{5} = \frac{-3b-a}{4} = \frac{b-2a}{1}$</p> <p>$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a - 11b = -8 \\ -7a + 7b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$</p> <p>Suy ra A(0; 3; -1), B(-5; -1; -2)</p> <p>+ Đường phân giác góc \widehat{ACB} cắt AB tại D ta có $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{56}} = \frac{1}{2}$</p> <p>$\Rightarrow \vec{DB} = -2\vec{DA} \Rightarrow D(-\frac{5}{3}; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3})$</p> <p>$\Rightarrow \vec{CD} = (-\frac{8}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{10}{3}) \Rightarrow$ phương trình đường thẳng CD: $\frac{x-1}{-4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-5}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>-----</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>	
	VIIa	<p>Câu VIIa (1 điểm) Gọi $z = x + iy$</p>	
		<p>$z + 5i = -3 + iz \Leftrightarrow x + (y+5)i = (y-3) + ix \Leftrightarrow x^2 + (y+5)^2 = (y-3)^2 + x^2$</p>	0,25
		<p>$\Leftrightarrow y = -1$</p>	0,25
		<p>$i\bar{z} - \frac{2}{z} = i(x - yi) - \frac{2(x - yi)}{x^2 + y^2} = \frac{y(x^2 + y^2) - 2x + [x(x^2 + y^2 + 2y)]i}{x^2 + y^2}$</p>	0,25
		<p>Ta có : $y = -1$ và $i\bar{z} - \frac{2}{z}$ là số ảo khi và chỉ khi $\begin{cases} y(x^2 + y^2) - 2x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$</p>	0,25
		<p>Vậy $z = -1 - i$</p>	0,25
		<p>2. Theo chương trình Nâng cao:</p>	-----
	VIb	<p>Câu VIb (2 điểm)</p>	
		<p>1) A, B $\in (E)$ thỏa $CA = CB$. Theo tính chất đối xứng qua trục hoành của elip thì A và B đối xứng qua trục hoành $\Rightarrow A(x_0; y_0), B(x_0; -y_0)$, với $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{9} = 0, -5 \leq y_0 \leq 5$</p>	
		<p>$S = \frac{1}{2} d(C, AB) \cdot AB = \frac{1}{2} 5 - x_0 2 y_0 \Leftrightarrow S^2 = \frac{9}{25} (25 - x_0^2)(5 - x_0)^2 = \frac{3}{25} (5 - x_0)^3 (15 + 3x_0)$</p>	0,25
		<p>+ BĐT Cô-Si : $\sqrt{(5 - x_0)(15 + 3x_0)} \leq \frac{1}{2} (5 - x_0 + 15 + 3x_0) = 10 + x_0$</p>	

$$\text{Suy ra } S^2 \leq \frac{3}{25}(5-x_0)^2(10+x_0)^2 = \frac{3}{25}((5-x_0)(10+x_0))^2 \leq \frac{3}{25}\left(\frac{15}{2}\right)^4$$

$$\text{Suy ra } S \leq \frac{45\sqrt{3}}{4}, \text{ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 5-x_0 = 15+3x_0 \\ 5-x_0 = 10+x_0 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = -\frac{5}{2}$$

$$\text{Vậy MaxS} = \frac{45\sqrt{3}}{4} \text{ khi và chỉ khi } A\left(-\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\text{hoặc } A\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right), B\left(-\frac{5}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

2) (1 điểm)

(P) có VTPT $\vec{n}_P = (2; 3; -1)$; d có VTCP $\vec{u} = (4; -1; -2)$

Gọi $\vec{n}_Q = (A; B; C)$ là VTPT của mặt phẳng (Q) cần tìm

$$+d // (Q) \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n}_Q \Leftrightarrow 4A - B - 2C = 0 \Leftrightarrow B = 4A - 2C \quad (1)$$

$$+ \cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|2A + 3B - C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{14}} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2) ta có}$$

$$2|2A + 3(4A - 2C) - C| = \sqrt{14} \cdot \sqrt{A^2 + C^2 + (4A - 2C)^2} \Leftrightarrow 9C^2 - 40AC + 39A^2 = 0$$

Nếu A = 0 thì C = 0 suy ra B = 0, vô lí. Vậy A ≠ 0, chọn A = 1 ta có

$$9C^2 - 40C + 39 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 3 \Rightarrow B = -2 \\ C = 13/9 \Rightarrow B = 10/9 \end{cases}$$

+ Với $\vec{n}_Q = (1; -2; 3) \Rightarrow$ phương trình (Q): $(x-2) - 2(y-2) + 3(z-1) = 0$

$$\text{hay } x - 2y + 3z - 1 = 0.$$

+ Với $\vec{n}_Q = (1; \frac{10}{9}; \frac{13}{9}) \Rightarrow$ phương trình (Q) $(x-2) + \frac{10}{9}(y-2) + \frac{13}{9}(z-1) = 0$ hay

$$9x + 10y + 13z - 51 = 0$$

Câu VIIb (1 điểm) Hệ đã cho tương đương $\begin{cases} \ln(1+2x) - 2x = \ln(1+2y) - 2y \quad (1) \\ x^2 - 6xy + 3y^2 = -8 \quad (2) \end{cases}$

VIIb

ĐK: $x > -\frac{1}{2}, y > -\frac{1}{2}$. Đặt $f(t) = \ln(1+2t) - 2t, t > -\frac{1}{2}$

$$f'(t) = \frac{2}{1+2t} - 2 = \frac{-4t}{1+2t}; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

BBT

t		-1/2	0	+	
f'(t)			+	0	-
f(t)					

+ Nếu $xy \leq 0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm \Rightarrow hệ vô nghiệm

+ Xét $xy > 0 \Rightarrow x$ và y cùng dấu. Do $f(t)$ ĐB trên $(-1/2; 0)$ và NB trên $(0; +\infty)$ nên

$$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y. \text{ Thế vào (2) ta có } x^2 - 6x^2 + 3x^2 = -8 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2(\text{loại}) \end{cases}$$

Vậy hệ có nghiệm $(x; y) = (2; 2)$