

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2 điểm) Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - mx^2 + \frac{1}{2}$ (1)

- 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) hàm số khi $m = 1$
- 2) Xác định m để đồ thị hàm số (1) có 3 điểm cực trị A, B, C và đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R = \frac{3}{2}$

Câu II (2 điểm)

1) Giải phương trình: $6 \cot^3 x - 2 \cot x + \frac{3(1 - \sin 2x)}{\sin^2 x} - 8 \sin^2(\frac{\pi}{4} - x) = 0$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 \sqrt{3+2y} + 2xy - 3\sqrt{3+2y} = 15 \\ x(x - \sqrt{3+2y}) + 2y = 4 \end{cases}$$

Câu III (1 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^2 \frac{x+1}{1+2x+\sqrt{1+4x}} dx$

Câu IV (1 điểm) Cho hình chóp đều S.ABCD, cạnh đáy bằng a. Gọi M, N lần lượt trung điểm các cạnh SA và BC. Biết góc giữa MN và mặt phẳng (ABCD) bằng 60° . Tính thể tích khối chóp S.ABCD và khoảng cách giữa MN và BD.

Câu V (1 điểm) Cho các số thực a, b, c > $-\frac{1}{4}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{2a^2+1}{2b+2c+1} + \frac{2b^2+1}{2c+2a+1} + \frac{2c^2+1}{2a+2b+1}$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) (Thí sinh chọn một trong hai phần sau)

1. Theo chương trình Chuẩn:

Câu VIa (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 15 = 0$ và điểm A(3; 9). Từ A vẽ các tiếp tuyến AB, AC đến đường tròn (C) ; với B, C là các tiếp điểm. Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

2) Trong không gian tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$; $d_2: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$ và điểm M(-5; -1; 4). Chứng tỏ d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm I. Viết phương trình đường thẳng Δ qua M cắt d_1, d_2 lần lượt tại A, B khác I sao cho $IA = IB$.

Câu VIIa (1 điểm) Tìm tập hợp các điểm M trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức z thỏa điều kiện $z = (1 + 2i)w + 1$, trong đó $w \in C$ và $|\frac{w+1-i}{2-i}| = \sqrt{5}$.

2. Theo chương trình Nâng cao:

Câu VIb (2 điểm)

1) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E): $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ và hai điểm A(3; 4), B(6; 2). Tìm điểm C trên

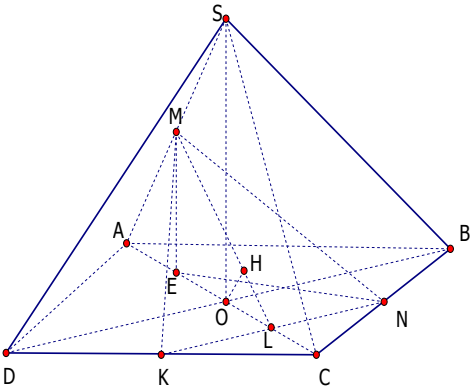
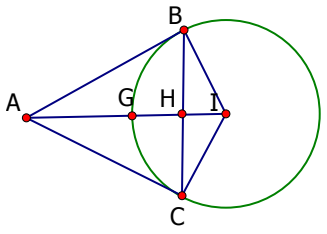
(E) sao cho diện tích tam giác ABC nhỏ nhất. Trong trường hợp đó tính giá trị của $\sin^2 \widehat{CAB} + \sin^2 \widehat{CBA}$.

2) Trong không gian tọa độ Oxyz cho ba điểm A(1; 2; 3), B(-2; 1; 4) và C(1; 4; -1). Tìm điểm M trên mặt phẳng (P): $3x + 4y - 5z - 6 = 0$ sao cho $Q = MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu VIIb (1 điểm) Tính tổng $S = C_{2013}^0 - C_{2013}^2 + C_{2013}^4 - C_{2013}^6 + \dots - C_{2013}^{2010} + C_{2013}^{2012}$

----- Hết -----

Câu	Đáp án	Điểm
II	<p>Câu II (2 điểm) 1) (1 điểm) Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$. Phương trình tương đương: $6 \cot^3 x - 2 \cot x + 3(1 + \cot^2 x)(1 - \sin 2x) - 4(1 - \sin 2x) = 0$ $\Leftrightarrow 2 \cot x(3 \cot^2 x - 1) + (1 - \sin 2x)(3 \cot^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow (3 \cot^2 x - 1)(2 \cot x + 1 - \sin 2x) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cot^2 x - 1 = 0 (1) \\ 2 \cot x + 1 - \sin 2x = 0 (2) \end{cases}$ (1) $\Leftrightarrow \cot x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$ (2) $\Leftrightarrow 2(\cot x + 1) - (1 + \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x) \left(\frac{2}{\sin x} - (\sin x + \cos x) \right) = 0$ $\Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$ Vì $\left \frac{2}{\sin x} \right \geq 2$ và $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{2}{\sin x} - (\sin x + \cos x) = 0$ vô nghiệm 2) (1 điểm) Đặt $t = \sqrt{3+2y}, t \geq 0$. Hệ trở thành $\begin{cases} x^2 t + x(t^2 - 3) - 3t = 15 \\ x^2 - xt + t^2 - 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 t + xt^2 - 3(x+t) = 15 \\ x^2 + t^2 - xt = 7 \end{cases} \quad (I)$ Đặt $S = x + t$; $P = xt$; $S^2 \geq 4P$. Hệ (I) trở thành $\begin{cases} SP - 3S = 15 \\ S^2 - 3P = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{3}(S^2 - 7) \\ S^3 - 16S - 45 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \frac{1}{3}(S^2 - 7) \\ (S - 5)(S^2 + 5S + 9) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ Ta có $\begin{cases} x+t=5 \\ xt=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3, t=2 \\ x=2, t=3 \end{cases}$. Với $t=2 \Rightarrow y=\frac{1}{2}$, với $t=3 \Rightarrow y=3$ Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm (x, y) là $(3, \frac{1}{2})$ và $(2, 3)$</p>	0,25 0,25 0,25 0,25 ----- 0,25 0,25 0,25 0,25 -----
III	<p>Câu III (1 điểm) $I = \int_0^2 \frac{x+1}{1+2x+\sqrt{1+4x}} dx$ + Đặt $t = \sqrt{1+4x} \Rightarrow x = \frac{t^2-1}{4} \Rightarrow dx = \frac{1}{2} t dt$. Với $x=0 \Rightarrow t=1$; với $x=2 \Rightarrow t=3$ $+ I = \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{t(t^2+3)}{t^2+2t+1} dt = \frac{1}{4} \int_1^3 \left(t-2 + \frac{6t+2}{t^2+2t+1} \right) dt = \frac{1}{4} \int_1^3 \left(t-2 + \frac{6}{t+1} - \frac{4}{(t+1)^2} \right) dt$ $= \frac{1}{4} \left(\frac{(t-2)^2}{2} + 6 \ln t+1 + \frac{4}{t+1} \right) \Big _1^3 = \frac{1}{4} (6 \ln 2 - 1)$</p>	0,25 0,25 0,5 -----
IV	<p>Câu IV (1 điểm) + Gọi $O = AC \cap BD$ thì $SO \perp (ABCD)$. Gọi E trung điểm AO thì $ME // SO$ $\Rightarrow ME \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{MNE} = 60^\circ$ là góc giữa MN và mp(ABCD) Ta có $EN^2 = CE^2 + CN^2 - 2CE \cdot CN \cdot \cos 45^\circ = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow EN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ $ME = EN \cdot \tan 60^\circ = \frac{a\sqrt{30}}{4}$, $SO = 2ME = \frac{a\sqrt{30}}{2}$, $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{30}}{2}$</p>	0,25 0,25

Câu	Đáp án	Điểm
	 <p data-bbox="829 226 1344 592"> + Gọi K trung điểm CD thì $KN // BD \Rightarrow BD // (MKN)$ $\Rightarrow d(BD, MN) = d(O, (MKN))$ + Gọi $L = AC \cap KN$, ta có $KN \perp (SAC) \Rightarrow (MKN) \perp (SAC)$ + Hạ $OH \perp ML$, $H \in ML$ thì $OH \perp (MKN)$. Tam giác vuông MEL và OHL đồng dạng + suy ra $\frac{OH}{ME} = \frac{OL}{ML} \Rightarrow OH = \frac{ME \cdot OL}{ML}$ </p> <p data-bbox="256 646 1263 730"> Ta có $OL = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $ML = \sqrt{ME^2 + EL^2} = \frac{a\sqrt{38}}{4} \Rightarrow OH = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{15}{38}} = d(BD, MN)$ </p>	<p data-bbox="1409 302 1464 331">0,25</p> <p data-bbox="1409 667 1464 730">0,25 ----</p>
<p data-bbox="147 848 175 877">V</p>	<p data-bbox="256 772 467 802">Câu V (1 điểm)</p> $2P = \frac{4a^2 + 2}{2b + 2c + 1} + \frac{4b^2 + 2}{2c + 2a + 1} + \frac{4c^2 + 2}{2a + 2b + 1}$ <p data-bbox="256 907 1279 982">Ta có: $4a^2 + 1 \geq 4a \Rightarrow \frac{4a^2 + 2}{2b + 2c + 1} \geq \frac{4a + 1}{2b + 2c + 1}$, dấu đẳng thức xảy ra KCK $a = \frac{1}{2}$</p> <p data-bbox="256 991 880 1066">Suy ra $2P \geq \frac{4a + 1}{2b + 2c + 1} + \frac{4b + 1}{2c + 2a + 1} + \frac{4c + 1}{2a + 2b + 1}$</p> $\Leftrightarrow 2P \geq (4a + 4b + 4c + 3) \left(\frac{1}{2b + 2c + 1} + \frac{1}{2c + 2a + 1} + \frac{1}{2a + 2b + 1} \right) - 6$ <p data-bbox="256 1159 1367 1234">Theo BĐT Bunhiacôpxki $(4a + 4b + 4c + 3) \left(\frac{1}{2b + 2c + 1} + \frac{1}{2c + 2a + 1} + \frac{1}{2a + 2b + 1} \right) \geq 9$</p> <p data-bbox="256 1255 1205 1331">Suy ra $2P \geq 3 \Leftrightarrow P \geq \frac{3}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$</p> <p data-bbox="256 1339 457 1402">Vậy $\text{Min} P = \frac{3}{2}$</p>	<p data-bbox="1409 928 1464 957">0,25</p> <p data-bbox="1409 1075 1464 1104">0,25</p> <p data-bbox="1409 1180 1464 1209">0,25</p> <p data-bbox="1409 1360 1464 1390">0,25 ----</p>
<p data-bbox="147 1507 207 1537">VIa</p>	<p data-bbox="256 1411 1205 1444">II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) (Thí sinh chọn một trong hai phần sau)</p> <p data-bbox="256 1453 662 1486">1. Theo chương trình Chuẩn:</p> <p data-bbox="256 1495 506 1528">Câu VIa (2 điểm)</p>  <p data-bbox="685 1516 1334 1591">1)(1 điểm) (C) có tâm $I(-3; 1)$, bán kính $R = 5$. ta có $AI = 10$</p> <p data-bbox="685 1600 1334 1705">Ta có $\cos \hat{AIB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{AIB} = 60^\circ \Rightarrow \hat{ABC} = 60^\circ$ \Rightarrow tam giác ABC đều. Gọi $H = AI \cap BC$</p> <p data-bbox="685 1717 1295 1793">$IH = \frac{IB^2}{IA} = \frac{5}{2}$. Do đó $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4} \overrightarrow{IA} \Rightarrow H(-\frac{3}{2}, 3)$;</p> <p data-bbox="256 1801 1377 1835">Suy ra tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC trùng với trọng tâm G của tam giác ABC</p> <p data-bbox="256 1843 1205 1919">Ta có $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AH} \Rightarrow G(0; 5)$. Bán kính đường tròn nội tiếp là $r = GH = \frac{5}{2}$</p> <p data-bbox="256 1927 1247 1990">Suy ra phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC là: $x^2 + (y - 5)^2 = \frac{25}{4}$</p>	<p data-bbox="1409 1621 1464 1650">0,25</p> <p data-bbox="1409 1873 1464 1902">0,5</p> <p data-bbox="1409 1948 1464 1978">0,25</p>

Câu	Đáp án	Điểm
	<p>2)(1 điểm) d_1 cắt d_2 tại điểm I khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm duy nhất</p> $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \\ \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \\ z=1 \end{cases}$ <p>Vậy d_1 cắt d_2 tại điểm I (1; -1; 1).</p> <p>d_1 có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$, d_2 có VTCP $\vec{v} = (-2; 1; 2)$ suy ra $[\vec{u}, \vec{v}] = (3; -6; 6)$. Ta có $\vec{IM} = (-6; 0; 3) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{IM} = 0 \Rightarrow M \in mp(d_1; d_2)$ + Lấy $E(3; 1; 2) \in d_1$ và tìm $F \in d_2$ sao cho $IE = IF$. Ta có $F(-1-2t; t; 3+2t)$</p> $IE = IF \Leftrightarrow IE^2 = IF^2 \Leftrightarrow 9 = (2+2t)^2 + (t+1)^2 + (2t+2)^2 \Leftrightarrow 9 = 9(t+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-2 \end{cases}$ <p>$\Rightarrow F(-1; 0; 3)$ và $F'(3; -2; -1)$</p> <p>+ Đt Δ qua M nhận $\vec{EF} = (-4; -1; 1)$ làm VTCP có pt: $\frac{x+5}{-4} = \frac{y+1}{-1} = \frac{y-4}{1}$</p> <p>+ Đt Δ qua M nhận $\vec{EF}' = (0; -3; -3)$ làm VTCP có pt: $\begin{cases} x=-5 \\ y=-1-3t \\ z=4-3t \end{cases}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>-----</p>
<p>VIIa</p>	<p>Câu VIIa (1 điểm) Gọi $z = x + iy$</p> $z = (1 + 2i)w + 1 \Leftrightarrow w = \frac{z-1}{1+2i}$ <p>suy ra</p> $w + 1 - i = \frac{(x-1) + yi}{1+2i} + 1 - i = \frac{(x-1) + yi + (1-i)(1+2i)}{1+2i} = \frac{(x+2) + (y+1)i}{1+2i}$ $\frac{w+1-i}{2-i} = \frac{(x+2) + (y+1)i}{(1+2i)(2-i)} = \frac{(x+2) + (y+1)i}{4+3i}$ $\left \frac{w+1-i}{2-i} \right = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left \frac{(x+2) + (y+1)i}{4+3i} \right = \sqrt{5} \Leftrightarrow (x+2) + (y+1)i = \sqrt{5} 4+3i $ $\Leftrightarrow (x+2)^2 + (y+1)^2 = 125$ <p>Vậy tập hợp điểm là đường tròn tâm I(-2; -1), bán kính $R = 5\sqrt{5}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
<p>VIIb</p>	<p>2. Theo chương trình Nâng cao:</p> <p>Câu VIIb (2 điểm)</p> <p>1)(1 điểm) Phương trình đường thẳng AB: $2x + 3y - 18 = 0$ và $AB = \sqrt{13}$</p> $C(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{8} = 1, d(C; AB) = \frac{ 2x_0 + 3y_0 - 18 }{\sqrt{13}}$ $S = S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot d(C; AB) = \frac{ 2x_0 + 3y_0 - 18 }{2}$ <p>+ BĐT Bunhiacôpxki: $(2x_0 + 3y_0)^2 = \left(\frac{x_0}{3\sqrt{2}} \cdot 6\sqrt{2} + \frac{y_0}{2\sqrt{2}} \cdot 6\sqrt{2}\right)^2 \leq \left(\frac{x_0^2}{18} + \frac{y_0^2}{8}\right) 144 = 144$</p> $\Rightarrow -12 \leq 2x_0 + 3y_0 \leq 12 \Rightarrow -30 \leq 2x_0 + 3y_0 - 18 \leq -6 \Rightarrow 2x_0 + 3y_0 - 18 \geq 6 \Rightarrow S \geq 3,$ <p>dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \frac{x_0}{36} = \frac{y_0}{24} \\ 2x_0 + 3y_0 - 18 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = 2 \end{cases}$</p> <p>Vậy Min $S = 3$ khi và chỉ khi $C(3; 2)$</p>	<p>----</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

Câu	Đáp án	Điểm
	<p>+ Ta có $\vec{CA} = (0; 2), \vec{CB} = (3; 0) \Rightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Rightarrow$ Tam giác ABC vuông tại C.</p> <p>Suy ra : $\sin^2 \hat{CAB} + \sin^2 \hat{CBA} = 1$</p> <p>2)(1 điểm) Tìm điểm I sao cho $\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OI} = \frac{1}{2}(\vec{OA} - 2\vec{OB} + 3\vec{OC})$</p> <p>Suy ra I(4; 6; -4) . Với $M \in (P)$ ta có</p> $Q = MA^2 - 2MB^2 + 3MC^2 = (\vec{MI} + \vec{IA})^2 - 2(\vec{MI} + \vec{IB})^2 + 3(\vec{MI} + \vec{IC})^2$ $= 2MI^2 + IA^2 - 2IB^2 + 3IC^2 + 2MI(\vec{IA} - 2\vec{IB} + 3\vec{IC}) = 2MI^2 + IA^2 - 2IB^2 + 3IC^2$ <p>Do $IA^2 - 2IB^2 + 3IC^2$ không đổi nên Q nhỏ nhất khi và chỉ khi MI nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P)</p> <p>+ Đường thẳng d qua I vuông góc với (P) nhận $n_p = (3; 4; -5)$ làm VTCP nên có</p> $\text{phương trình tham số } \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 6 + 4t \\ z = -4 - 5t \end{cases} .$ <p>+Tọa độ giao điểm M của d và (P) ứng tham số t là nghiệm phương trình: $3(4 + 3t) + 4(6 + 4t) - 5(-4 - 5t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 50 + 50t = 0 \Leftrightarrow t = -1$ Vậy M(1; 2; 1)</p>	<p>0,25</p> <p>-----</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
VIIb	<p>Câu VIIb (1 điểm)</p> <p>Ta có $(1+i)^{2013} = C_{2013}^0 + C_{2013}^1 i + C_{2013}^2 i^2 + C_{2013}^3 i^3 + \dots + C_{2013}^{2012} i^{2012} + C_{2013}^{2013} i^{2013}$</p> <p>Vì $i^{4m} = 1, i^{4m+1} = i, i^{4m+2} = -1, i^{4m+3} = -i$ và $2013 = 4 \cdot 503 + 1$. Suy ra</p> $(1+i)^{2013} = (C_{2013}^0 - C_{2013}^2 + C_{2013}^4 - C_{2013}^6 + \dots + C_{2013}^{2012}) + (C_{2013}^1 - C_{2013}^3 + C_{2013}^5 - \dots + C_{2013}^{2013})i \quad (1)$ <p>Vì $(1+i)^2 = 2i$ nên $(1+i)^{2013} = (1+i)^{4 \cdot 503 + 1} = (-2^2)^{503} (1+i) = -2^{1006} (1+i) \quad (2)$</p> <p>Từ (1) và (2) suy ra $C_{2013}^0 - C_{2013}^2 + C_{2013}^4 - C_{2013}^6 + \dots - C_{2013}^{2010} + C_{2013}^{2012} = -2^{1006}$</p>	<p>0,25</p> <p>----</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>